



Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas VI (MA-2113)
3^{er} Examen Parcial (35 %)
Verano 2015

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (12 pts.) Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se define por:

(a) $f(z) = ze^{5/x} + \frac{1 - \cos z}{iz^2}$, desarrollarla en serie de Laurent-Taylor de potencias de z .

(b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(z+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(1+i)^n}$, hallar el anillo de convergencia de f y la expresión de f en términos de funciones elementales.

2. (8 pts.) Sea $f(z) = \frac{\text{sen}(3z)}{e^{-2z} + 2z - 1}$. Estudiar la naturaleza de la singularidad de f en $z = 0$. Hallar además $\int_{|z|=1} f(z)dz$ usando la fórmula integral de Cauchy.

3. (15 pts.) Sea $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}$, para $a, b \in \mathbb{R}^+$ distintos.

(a) Hallar los polos y los residuos de f .

(b) Tomar un contorno de integración apropiado con $f(z)$ para demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right)$$

(c) Suponiendo el paso al límite dentro del signo integral válido, deducir de la parte anterior que cuando $b \rightarrow a$, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a^3} (a + 1)e^{-a}$$